39. Hajós György Országos Matematikaverseny
Budapest, 2017. április 28.

1. Adott az

$$a_n = 1 - \frac{2}{1+n^3}, \qquad n = 2,3,\dots$$

sorozat. Számítsa ki a

$$\lim_{n\to\infty} a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

határértéket.

2. Határozza meg az a, b, c valós számok értékét, hogy az

$$f(x) = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

függvény legnagyobb alsó korlátja -2, legkisebb felső korlátja 2 legyen.

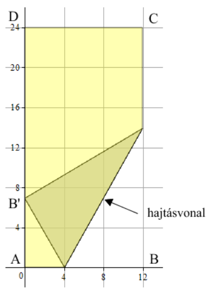
3. Az r_0 sugarú K_0 kör belsejébe rajzolunk 12 egybevágó kis kört, amelyek belülről érintik a K_0 kört, és sorban egymást is érintik, végül a 12. érinti az 1. kis kört. A kis körlapokat befestjük pirosra. Ezután megrajzoljuk a K_0 körrel koncentrikus, a kis piros köröket belülről érintő K_1 kört, és az előbbi eljárást megismételjük újra és újra. Hányadik lépésnél érhető el, hogy a K_0 kör területének 80 %-a pirosra lesz festve?

4. Milyen $1 < p$ paraméter esetén van pontosan egy valós megoldása a

$$\log_p x = p^x$$

egyenletnek?

5. Az $ABCD$ téglalap alakú papírlap szélessége AB=12 cm és magassága BC=24 cm. A lap B sarkát behajtjuk úgy, hogy a B sarok elérje a szemben levő AD oldalt valamely B' pontban. Hol hajtsuk be a B sarkot, hogy a hajtásvonal ℓ hossza minimális legyen? Mekkora a minimális hosszúságú hajtásvonal hossza?



Minden feladat helyes megoldása 20 pontot ér. Részmegoldást is értékelünk.
Jó munkát kíván a Versenybizottság!

Dr. Obádovics J. Gyula

Dr. Csató Sándor — Dr. Klincsik Mihály

Dr. Molnár-Sáska Katalin — Schmidt Edit — Dr. Székely László