1. Adott az

$$a_n = 1 - \frac{2}{1+n^3}, \qquad n = 2,3,\ldots$$

sorozat. Számítsa ki a

$$\lim_{n\to\infty} a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

határértéket.

Megoldás: Először alakítsuk át az a_k kifejezést:

$$a_k = 1 - \frac{2}{1+k^3} = \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}, \qquad k = 2,3,\ldots$$

Ez alapján az $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ szorzat átírható a következő alakra

$$a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{1+k^3}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

Az első tényezőben lévő szorzatról könnyen látszik, hogy teleszkópikus. Belátjuk, hogy a második tényező is teleszkópikus, ehhez egy rögzített k esetére tekintsük két egymást követő tag szorzatát:

$$\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\cdot\frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{(k+1)^2-(k+1)+1} = \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\cdot\frac{k^2+3k+3}{k^2+k+1}.$$

Ezek alapján

$$a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) = \frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3},$$

így a kérdéses határérték

$$\lim_{n\to\infty} a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)} = \frac{2}{3}.$$

2. Határozza meg az a, b, c valós számok értékét, hogy az

$$f(x) = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

függvény legnagyobb alsó korlátja -2, legkisebb felső korlátja 2 legyen.

Megoldás: Az $f(x)$ korlátos, ezért a számlálónak is zérushelye kell legyen az 1 és a -1.

Ezért az

$$a + b + c = 0 \Rightarrow c = -b - a$$

feltételnek teljesülni kell. Ha a számlálót és nevezőt is leosztjuk az ($x^2 - 1$) kifejezéssel, akkor a

$$g(x) = \frac{ax^2 + b + a}{x^2 + 1}$$

függvényt kapjuk. Tudjuk, hogy

$$g(x) = \frac{ax^2 + b + a}{x^2 + 1} = f(x), ha\, x \neq \pm 1 .$$

Számoljuk ki a deriváltját:

$$g'(x) = \left(\frac{ax^2 + b + a}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2ax(x^2 + 1) - 2x(ax^2 + b + a)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2bx}{(x^2 + 1)^2} .$$

Ha $b = 0$, akkor a $g(x)$ függvény konstans, ez nem felel meg a feltételeinknek. Ha $b \neq 0$, akkor a $g(x)$ függvénynek az $x = 0$ helyen szélsőértéke van, ha $b > 0$, akkor maximum, ha $b < 0$, akkor minimum. A feltételek szerint a minimum értéke -2 kell legyen, a maximum értéke pedig 2.

Tehát, ha $b > 0$, akkor

$$g(0) = 2 \Rightarrow b + a = 2 \Rightarrow b = 2 - a ,$$

ha $b < 0$, akkor

$$g(0) = -2 \Rightarrow b + a = -2 \Rightarrow b = -2 - a .$$

Ekkor

$g(x) = \dfrac{ax^2 + 2}{x^2 + 1}$, ha $b > 0$, illetve $g(x) = \dfrac{ax^2 - 2}{x^2 + 1}$,ha $b < 0$.

Mivel $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = a$, ezért, ha 2 a maximum, akkor $a = -2$, ha -2 a minimum, akkor $a = 2$ kell legyen.

Tehát az

$$f(x)=\frac{-2x^4+4x^2-2}{x^4-1},$$

illetve az

$$f(x)=\frac{2x^4-4x^2+2}{x^4-1}$$

függvény eleget tesz a feltételeknek. Ugyanis mindkét függvény szigorúan monoton a $]-\infty;0[$, illetve a $]0;\infty[$ intervallumokon és

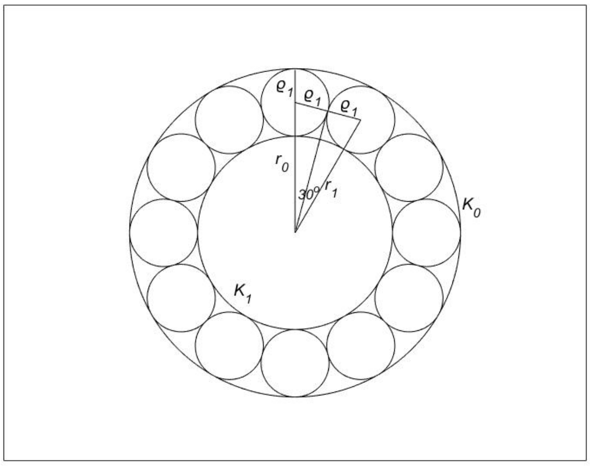
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^4+4x^2-2}{x^4-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4+4x^2-2}{x^4-1}=-2+$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-4x^2+2}{x^4-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-4x^2+2}{x^4-1}=2-$$

Az is látszik, hogy mindkét függvény határértéke -1-ben és 1-ben 0.

3. Az r_0 sugarú K_0 kör belsejébe rajzolunk 12 egybevágó kis kört, amelyek belülről érintik a K_0 kört, és sorban egymást is érintik, végül a 12. érinti az 1. kis kört. A kis körlapokat befestjük pirosra. Ezután megrajzoljuk a K_0 körrel koncentrikus, a kis piros köröket belülről érintő K_1 kört, és az előbbi eljárást megismételjük újra és újra. Hányadik lépésnél érhető el, hogy a K_0 kör területének 80 %-a pirosra lesz festve?

Megoldás:



A mellékelt ábra alapján $r_0 = r_1 + 2\rho_1$, ahol ρ_1 a kis körök sugara, r_1 pedig a K_1 köré. Másrészt $\sin 15^\circ = a = \frac{\rho_1}{r_1 + \rho_1}$. Ezekből: $r_1 = \frac{1-a}{1+a} \cdot r_0$, illetve $\rho_1 = \frac{a}{1-a} \cdot r_1 = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a}{1+a} \cdot r_0$. Az *n*. lépés után $r_n = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n \cdot r_0$, illetve $\rho_n = \frac{a}{1-a} \cdot r_n = \frac{a}{1-a} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n \cdot r_0$.

A K_0 kör területe $T_0 = r_0^2 \cdot \pi$.

A piros körök összes területe (*k* iterációt feltételezve):

$$T_p = \sum_{n=1}^{k} 12\pi\rho_n^2 = 12\pi \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n} r_0^2 = 12\pi r_0^2 \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \sum_{n=1}^{k} \left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right)^n =$$

$$= 12T_0 \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \sum_{n=1}^{k} \left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right)^n .$$

Ha az összegzést végtelenig folytatjuk, akkor egy mértani sor összegét kell kiszámítani:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2} = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \frac{(1+a)^2}{(1+a)^2 - (1-a)^2} = \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} \cdot \frac{(1+a)^2}{4a} = \frac{(1-a)^2}{4a} .$$

Tehát végtelen sok iterációt feltételezve:

$$T_p = 12T_0 \cdot \frac{a^2}{(1-a)^2} \cdot \frac{(1-a)^2}{4a} = T_0 \cdot 3a \ .$$

Mivel $3a = 3 \cdot \sin 15^\circ < 0{,}8$, *soha nem fogjuk elérni, hogy a* K_0 *kör területének 80%-a piros legyen*.

4. Milyen $1 < p$ paraméter esetén van pontosan egy valós megoldása a

$$\log_p x = p^x$$

egyenletnek?

Megoldás:

Értelmezési tartomány vizsgálata: $x > 0$. A $\log_p x$ és a p^x függvények egymás inverzei, ezért az egyenletnek pontosan akkor van egy megoldása, amikor a $\log_p x - x = 0$ egyenletnek. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \log_p x - x$ függvényt szélsőérték szempontjából!

$$f'(x) = \left(\log_p x - x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln p} - 1$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\frac{1}{x \cdot \ln p} - 1 = 0$$

ahonnan

$$x = \frac{1}{\ln p} \in D_f$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x \cdot \ln p} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln p}$$

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele teljesül:

$$f''\left(\frac{1}{\ln p}\right) = -\ln p \neq 0$$

Mivel $f''\left(\frac{1}{\ln p}\right) = -\ln p < 0$, az $f(x) = \log_p x - x$ függvénynek maximuma van az $x = \frac{1}{\ln p}$ helyen. Mivel $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln p} < 0$ minden $\in D_f$-re, a függvény az értelmezési tartományán szigorúan konkáv, tehát az $x = \frac{1}{\ln p}$ helyen a függvénynek abszolút maximuma van. A $\log_p x - x = 0$ egyenletnek akkor van egyértelmű megoldása, ha az $f(x)$ maximum értéke 0. Innen az alábbi egyenletet kapjuk p-re:

$$f\left(\frac{1}{\ln p}\right) = \log_p \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln p} = 0$$

$$\log_p \frac{1}{\ln p} = \frac{1}{\ln p}$$

$$-\log_p \ln p = \frac{1}{\ln p}$$

$$-\frac{\ln(\ln p)}{\ln p} = \frac{1}{\ln p}$$

$$\ln(\ln p) = -1$$

A logaritmus definíciója alapján:

$$\ln p = e^{-1}$$

$$p = e^{\frac{1}{e}}$$

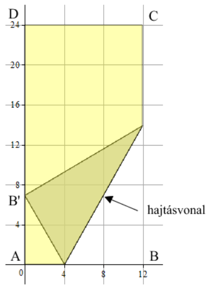
Ekkor az egyenlet megoldása $x = e \in D_f$. Az egyenletnek valóban ez az egy megoldása van, mert az $f_1(x) = \log_{e^{\frac{1}{e}}}(x)$ és az $f_2(x) = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x$ függvények grafikonjaihoz az $x = e$ abszcisszájú pontban húzott érintőik egybeesnek:

$$e_1(x) = f_1'(e) \cdot (x-e) + f_1(e) = \frac{1}{e \cdot ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)} \cdot (x-e) + \log_{e^{\frac{1}{e}}}(e) = (x-e) + e = x$$

$$e_2(x) = f_2'(e) \cdot (x-e) + f_2(e) = e \cdot ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right) \cdot (x-e) + \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = (x-e) + e = x$$

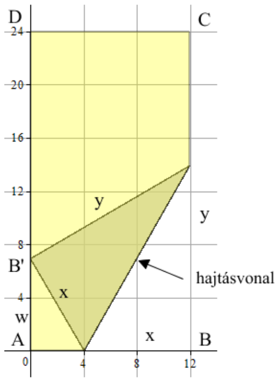
Továbbá az $f_1(x)$ konkáv, az $f_2(x)$ konvex, így a közös érintő az érintési pont kivételével elválasztja a grafikonok pontjait.

5. Az $ABCD$ téglalap alakú papírlap szélessége AB=12 cm és magassága BC=24 cm. A lap B sarkát behajtjuk úgy, hogy a B sarok elérje a szemben levő AD oldalt valamely B' pontban. Hol hajtsuk be a B sarkot, hogy a hajtásvonal ℓ hossza minimális legyen? Mekkora a minimális hosszúságú hajtásvonal hossza?



Megoldás

Jelölje L a hajtásvonal hosszát, x és y a behajtás távolságát a B csúcstól mérve az AB illetve BC oldalon, w az AB' szakasz hosszát!



Pitagorász-tétel alapján $L^2 = x^2 + y^2$ a hajtás hosszának négyzete, melynek minimuma ugyanott van, ahol L minimuma! A hajtás során a keletkezett fül egybevágó az eredeti füllel, ezért

(1) $$(12 - x)^2 + w^2 = x^2$$

Ahonnan

$$w = 2 \cdot \sqrt{6 \cdot (x - 6)},$$

ezért $6 < x < 12$.

Az x és y változók között kapunk összefüggést, ha a téglalap $T = 12 \cdot 24 = 288\ [cm^2]$ területét felírjuk, mint a behajtási fül területének kétszerese, a trapéz területének és az A csúcsnál keletkezett derékszögű háromszög területének összege

(2) $$288 = x \cdot y + \frac{(24-w+24-y)\cdot 12}{2} + \frac{(12-x)\cdot w}{2}$$

Helyettesítsük w helyére az (1) képletet (2)– ben és egyszerűsítsük

$$288 = x \cdot y + \left(24 - 2 \cdot \sqrt{6 \cdot (x - 6)} + 24 - y\right) \cdot 6 + (12 - x) \cdot \sqrt{6 \cdot (x - 6)}.$$

$$288 = x \cdot y + 288 - 6y - x \cdot \sqrt{6 \cdot (x - 6)}.$$

Ahonnan

$$y = \frac{x \cdot \sqrt{6 \cdot (x - 6)}}{x - 6} = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{x - 6}}$$

Írjuk L^2 képletébe y fenti alakját

$$L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{6x^2}{x - 6} = \frac{x^3}{x - 6} = f(x)$$

ahol $6 < x < 12$. Deriváljuk az f függvényt, hogy szélsőértékét meghatározzuk

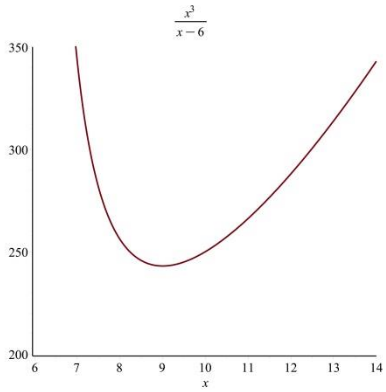
$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-6) - x^3}{(x-6)^2} = \frac{x^2(2x-18)}{(x-6)^2} = \frac{2x^2(x-9)}{(x-6)^2}$$

A feladat szempontjából a derivált zérus helyére csak az $x = 9$ a megfelelő érték. A derivált képletéből látható, hogy ha $6 < x < 9$, akkor $f'(x) < 0$ és ezért $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő. Ha $9 < x < 12$, akkor $f'(x) > 0$ és ezért $f(x)$ szigorúan monoton növekvő. Tehát $x = 9$ helyen valóban minimum helye van a hajtásvonal hossznégyzetének (lásd az 1. ábrát). Tehát, ha az AB szakaszon az A ponttól 3 cm-re, a B ponttól 9 cm-re hajtjuk be a lapot, akkor kapjuk a minimális hajtásvonal hosszúságot.

Ha $x = 9$, akkor $y = \frac{9 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{9-6}} = 9 \cdot \sqrt{2}$, ezért

$$L_{min} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9^2 + 2 \cdot 9^2} = 9 \cdot \sqrt{3} \approx 15.588$$

a minimális hajtásvonal hossz.



1. ábra. Az $L^2(x) = \frac{x^3}{x-6}$ függvény grafikonja